Curso 2015-2016 **Cálculo II** Grado M+I

APELLIDOS: NOMBRE:	Nota:

Soluciones del Examen Final Junio- Segundo Parcial - 6 de junio 2016

Teoría. *(2 puntos)* Nota: /2

1. Enuncia la condición suficiente de extremos relativos y de punto de silla en términos de la Hessiana para funciones de dos variables e indica en qué casos no se puede asegurar la existencia de extremos relativo.

2. Dada $f(x,y) = x^2 + \operatorname{sen}^2 y$, aplica el resultado anterior para clasificar los extremos relativos de f en $\mathbb{R}^2$.

2. Puesto que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, calculamos en primer lugar sus puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\operatorname{sen} y \cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto los puntos críticos son $(0, \frac{k\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. Para clasificar dichos obtenemos la matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y \end{pmatrix}$$

Y tenemos que:

1. Los puntos de la forma $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ son mínimos relativos puesto que: $|Hf(0,k\pi)| = 4$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,k\pi) = 2$ ya que:

$$Hf(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Los puntos de la forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ son puntos de silla puesto que $|Hf(0,(2k+1)\frac{\pi}{2})| < 0$, ya que:

$$Hf(0,(2k+1)\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cuestiones. *(2 puntos)*

Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta. | Nota: /2 |

1. Sea $f(x,y) = x^2|y|$ definida sobre el conjunto $E = \{(x,y) : y \leq 0\}$, entonces $f(x,y)$ alcanza el mínimo absoluto en E. [x] Si [ ] No

   El punto $(0,0)$ es un mínimo absoluto de f en E puesto que $f(x,y) = x^2|y| \geq 0 = f(0,0)$ para todo $(x,y) \in E$.

2. La siguiente figura muestra en azul las curvas de nivel de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, podemos asegurar que f tiene un mínimo relativo sobre la curva $y = x^2+3$ (rosa) en el vértice de la parábola. [ ] Si [x] No

   A la vista del dibujo podría ser un máximo o mínimo relativo.

3. Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos convergente tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^3 = 0$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. [ ] Si [x] No

   La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ no converge y sin embargo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

4. Sea $\overline{f}(x,y)$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y $J\overline{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\overline{f}(x,y)$ tiene inversa en $\mathbb{R}^2$. [ ] Si [x] No

   El teorema afirmaría en este caso que admite inversa <u>local</u> en torno al $(0,0)$ pero no global.

APELLIDOS: NOMBRE:	Nota:

Problemas. *(6 puntos)*

1. *(2 puntos)*

   i) Estudia la convergencia de las siguientes series: Nota: /2

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}})$ $\boxed{\text{x}}$ CONVERGE $\square$ NO CONVERGE

   Se trata de una serie alternada, y utilizando el criterio de Leibnitz puesto que:
   • $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}}) = 0$.
   • $\operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}})$ es una sucesión decreciente puesto que la función seno es creciente en $[0, 1]$ y por tanto $\operatorname{sen}(\frac{1}{(n+1)^{2/3}}) \leq \operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   entonces la serie es convergente.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{3^n}$ $\boxed{\text{x}}$ CONVERGE $\square$ NO CONVERGE Es una serie aritmético geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ y $|r| < 1$.

   ii) Indica si las series anteriores **convergen absolutamente** o no y justifica las respuestas:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}})$ $\square$ Si $\boxed{\text{x}}$ No

   La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}})$ no es convergente puesto que la comparamos con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ (ya que $\operatorname{sen}(\frac{1}{n^{2/3}}) \sim \frac{1}{n^{2/3}}$ si $n \to \infty$) que no converge puesto que $2/3 < 1$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{3^n}$ $\boxed{\text{x}}$ Si $\square$ No

   Es una serie de términos positivos, y puesto que convege también converge absolutamente.

   iii) Suma una de las dos series.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n} = \frac{1}{(1-1/3)^2} + \frac{2}{1-1/3}.$$

2. *(1 punto)* Dada la función $F(x, y, z) = e^{xy} + z\,\text{sen}(x + y)$ que describe la temperatura en (x, y, z) y una curva $(x(t), y(t), z(t))$ derivable con $x(0) = \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 0$, y $z(0) = 1$, calcula utilizando la regla de la cadena la derivada de $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ en $t = 0$ sabiendo que $x'(0) = 3$, $y'(0) = \frac{1}{\pi}$ y $z'(0) = \frac{1}{2}$.

Nota: /1

Puesto que la función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ podemos usar la regla de la cadena y se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + z\cos(x + y), \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + z\cos(x + y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \text{sen}(x + y),$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0), z(0))x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0), z(0))y'(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(0), y(0), z(0))z'(0) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, 0, 1)3 + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}, 0, 1)\frac{1}{\pi} + \frac{\partial f}{\partial z}(\frac{\pi}{2}, 0, 1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. *(1 punto)* Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ en el punto $(0, 0)$ y calcula el valor aproximado de $\ln(1 + \frac{1}{4})$ estimando el error.

Nota: /1

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor de grado dos es

$$P(x, y) = x^2 + y^2$$

Siendo $P(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$ el valor aproximado de $f(\frac{1}{2}, 0) = \ln(1 + \frac{1}{4})$. Utilizando el teorema de Taylor podemos estimar el error de la siguiente forma, existe $(a, 0)$ en el segmento de extremos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$ tal que:

$$ERROR =$$

$$|\frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\frac{\partial^3 f}{\partial y^{3-k}\partial x^k}(a, 0)\frac{1}{2^k}0^{3-k}| =$$

$$|\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, 0)\frac{1}{8}| = |\frac{-8a + 4a^3}{(1 + a^2)^2} \leq \frac{1}{3!}\frac{1}{8}(8\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2^3}) < 0,052$$

4. (*1 punto*) Calcula los extremos absolutos de la función

Nota: /1

$f(x,y) = x^4 + y^4$ sobre sobre el conjunto $E = \{(x,y) \,/\, 3x^2 + 4y^2 = 1\}$ en el caso de que existan.

Puesto que la función f es continua sobre el conjunto E que es cerrado y acotado, entonces existen el máximo y mínimo absoluto de f sobre E. Para calcularlos utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange, puesto que las funciones $f(x,y)$ y la funci'on $g(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 1$ son de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.

• Buscamos los puntos no regulares para g en E. Puesto que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{\partial g}{\partial y} = 8y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

y $(0,0) \notin E$, no hay puntos no regulares.

Buscamos los puntos tales que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando:

$$4x^3 = 6x$$

$$4y^3 = 8y$$

$$3x^2 + 4y^2 = 1$$

• Si $x = 0$ entonces $y = \dfrac{1}{2}$ o $y = \dfrac{-1}{2}$, y obtenemos los puntos $(0, \dfrac{1}{2})$ y $(0, \dfrac{-1}{2})$

• Si $y = 0$ entonces $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ o $x = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, y obtenemos los puntos $(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ y $(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ podemos despejar λ en las dos primeras ecuaciones e igualar en la última y tenemos que:

$$\lambda = \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{2}y^2, \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3}x^2$$

$$3x^2 + 4\frac{4}{3}x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ o} x = \frac{-\sqrt{3}}{5}$$

Y entonces $y^2 = \dfrac{4}{25}$ con lo cual $y = \dfrac{2}{5}$ o $y = \dfrac{-2}{5}$.

Por lo tanto los posibles extremos absolutos de f sobre E son los puntos:

$$(0, \frac{1}{2}), (0, \frac{-1}{2}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{5}), (\frac{-\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{5}), (\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{-2}{5}), (\frac{-\sqrt{3}}{5}, \frac{-2}{5})$$

Finalmente evalúamos f en todos estos puntos y obtenemos que:

Los puntos $(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\dfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$ son los máximos absolutos y el valor máximo de f en E es $\dfrac{1}{9}$.

Los puntos $(\dfrac{\sqrt{3}}{5}, \dfrac{2}{5}), (\dfrac{-\sqrt{3}}{5}, \dfrac{2}{5}), (\dfrac{\sqrt{3}}{5}, \dfrac{-2}{5}), (\dfrac{-\sqrt{3}}{5}, \dfrac{-2}{5})$ son los mínimos absolutos y el valor mínimo de f en E es $\dfrac{1}{25}$

5. (*1 punto*) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-2)^n$.

Nota: /1

i) Calcula su campo y su radio de convergencia. Calcula la función suma $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x-2)^n$ en su campo de convergencia.

ii) Calcula su serie derivada y calcula la suma de dicha serie para $x = \dfrac{3}{2}$.

El radio de convergencia de la serie es:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right)^{1/n}} = 2,$$

Luego si $0 < x < 4$ la serie converge.
• En $x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ no converge, por la condición necesaria puesto que $\{(-1)^n n\}$ no converge a 0.
• En $x = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ no converge, por la condición necesaria puesto que $\{n\}$ no converge a 0.
Luego el campo de convergencia de la serie es $(0, 4)$.
Puesto que se trata de una serie aritmético geométrica de razón $\frac{(x-2)}{2}$ se tiene que la suma es:

$$f(x) = \frac{\frac{x-2}{2}}{1-\frac{x-2}{2}} = \frac{x-2}{4-x}.$$

La serie derivada es $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}(x-2)^{n-1}$, puesto que en el campo de convergencia tenemos que:

$$f'(x) = \frac{2}{(4-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-2)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(\frac{3}{2}-2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2^{2n-1}} = f'(\frac{3}{2}) = \frac{8}{25}.$$